13/11/2017.

Γραμμικά Συστήματα.

Ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους είναι της μορφής:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Υπό μορφή πινάκων αυτό γράφεται ως $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

α) Μέθοδος Cramer:
Ασύμφορη διότι χρειάζεται υπολογ. $(n+1)$ οριζουσών με κόστος της τάξης του $n!$

β) Εύρεση του A^{-1} και υπολογισμός του $x = A^{-1}b$:
Για την εύρεση του αντίστροφα χρειάζονται λύσεις n συστημάτων:

$$AX = I \Leftrightarrow A[x^1 x^2 \dots x^n] = [e^1 e^2 \dots e^n] \Leftrightarrow$$
$$Ax^j = e^j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o

Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Παράδειγμα: Να λυθεί το γρ. σύστημα με την μέθοδο Απαλοιφής Gauss:

$$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$9x_1 = 0 - 6\cdot 2 - 3(-1) \Leftrightarrow x_1 = -9/9 = -1$

$\Leftrightarrow 4x_2 = 6 - 2(-1) \Leftrightarrow x_2 = 8/4 = 2$

$x_3 = -1$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 6 & 3 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{9}{6} & 8 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{x^T = [-1 \quad 2 \quad -1]}$$

Συμβολίζουμε το $Ax=b$ με $A^{(1)}x = b^{(1)}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \xrightarrow{1\ \text{αφαιρ.}} A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{ij}^{(1)}$$

$$, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n.$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(2)} - m_{i1} b_i^{(1)}$$

Κατά το r βήμα, μετά από r-1 απαλοιφές, προκύπτει:

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & a_{rr}^{(r)} \dots & a_{rn}^{(r)} \\ & & & \vdots & \\ & & & a_{nr}^{(r)} \dots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad b^{(r)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{bmatrix}$$

Μετά από $n-1$ απαλοιφές ο $A^{(n)}$ θα είναι άνω τριγωνικός.

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$$ διαιρέσεις

για εύρεση πολλαπλασιαστών.

$$(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2=\sum_{i=1}^{n-1} i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$, για

τον υπολογισμό των στοιχείων του A.

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$$, για τον

υπολογισμό των στοιχείων του b

Προς τα πίσω αντικατάσταση του $Ux=y$,

$$u_{kk}x_k+u_{k,k+1}x_{k+1}+u_{kk}x_n=y_k.$$

$x_n=y_n/u_{nn}$

Για $k=n-1, n-2, \ldots, 1$,

$$x_k=\left(y_k-\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right)/u_{kk}.$$

$$1+2+\ldots+(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}.$$

προσθ/πολλαπλασιασμοί για προς τα πίσω αντικατάσταση

n διαιρέσεις.

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n^3}{3}+P_2(n)$$

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου Gauss είναι $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

$\rightsquigarrow A^{(2)} = M_1 A$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -m_{n1} & \cdots 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow A^{(3)} = M_2 A^{(2)}$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -m_{32} & 1 & & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow A^{(r+1)} = M_r A^{(r)}$

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -m_{r+1,r} & 1 & \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & -m_{n,r} & 0 & \cdots \quad 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^n = M_n + A^{(n-1)} = M_{n-1} M_n + A^{(n-2)} = \ldots = \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} M_{n-3} \ldots M_2 M_1}_{M} A^{(1)} = MA$$

όπου M κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο $U = MA \iff A = M^{-1} U = L \cdot U$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο

$$L = U^{-1} = (M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

$$M_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{r+1,r} & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & m_{n,r} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$